

Олег Никифорчин

\emptyset ³ 6,94	\mathbb{N} ⁴ 9,01	\mathbb{Z} ⁵ 10,81	\mathbb{Q} ⁶ 12,01	\mathbb{R} ⁷ 14,01	\mathbb{C} ⁸ 16,0	\mathbb{H} ⁹ 19,0
∂ ¹¹ 22,99	Int ¹² 24,3	Вступ			Cl ¹⁶ 32,06	$(-)'$ ¹⁷ 35,45
\in ¹⁹ 39,10	\ni ²⁰ 40,1	\subset ²¹ 44,96	\supset ²² 47,9	\cup ²³ 50,9	\cap ²⁴ 52,0	\sqcup ²⁵ 54,9
$ X $ ²⁹ 63,55	dX ³⁰ 65,4	wX ³¹ 69,7	до	\tilde{X} ³³ 74,96	αX ³⁴ 78,96	βX ³⁵ 79,9
I ³⁷ 85,47	Π ³⁸ 87,6	I^n ³⁹ 88,9	S^n ⁴⁰ 91,2	D^n ⁴¹ 92,9	Q ⁴² 95,94	I^τ ⁴³ 98,9
\Rightarrow ⁴⁷ 107,9	То ⁴⁸ 112,4	По ⁴⁹ 114,8	Ло ⁵⁰ 118,7	Гі ⁵¹ 121,75	\ddot{i} ⁵² 127,6	\Leftarrow ⁵³ 126,9
\circ ⁵⁵ 132,9	\times ⁵⁶ 137,3	\triangle ⁵⁷ 138,9	Π ⁷² 178,5	\sqcup ⁷³ 180,9	f^{-1} ⁷⁴ 183,9	$/\sim$ ⁷⁵ 186,2

Університетська математична бібліотека



Олег Никифорчин

Вступ до топології

Підтримано грантом програми
“Talents for Ukraine”
Благодійного фонду “Київська школа
економіки”

Івано-Франківськ

2024

УДК 515.1
MSC 2020: 54-01
H62

Підтримано грантом програми “Talents for Ukraine” Благодійного фонду “Київська школа економіки”.

Схвалено до друку вченою радою факультету математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

Рецензенти: проф., д.ф.-м.н. М.М. Зарічний, завідувач кафедри алгебри, топології та основ математики Львівського національного університету ім. Івана Франка;

чл.-кор. НАН України, проф., д.ф.-м.н. С.І. Максименко, завідувач відділу алгебри і топології Інституту математики НАН України;

проф., д.ф.-м.н. В.К. Маслюченко, завідувач кафедри математичного аналізу Чернівецького національного університету ім. Юрія Федьковича.

Никифорчин, Олег

H62 Вступ до топології / Олег Никифорчин. — Івано-Франківськ: Голіней О.В., 2024. — 324 с.

ISBN 978-617-95377-8-3

У вигляді курсу лекцій викладено основи загальної (теоретико-множинної) топології, початки теорії многовидів та алгебраїчної топології. Наведено необхідні факти та поняття з теорії множин. Розглянуто метричні та топологічні простори, їх відображення, основні типи і властивості, зокрема, питання відокремленості, компактності та метризованості. Висвітлено основні властивості топологічних і диференційованих многовидів та відображень між ними. Подано елементи теорії гомотопій із застосуваннями до обчислення фундаментальних груп. Кожна лекція супроводжується питаннями та завданнями для самостійного розв'язування.

УДК 515.1

ISBN 978-617-95377-8-3

© Олег Никифорчин, 2024

Зміст

Вступ	10
Розділ I. Множини та їх відображення. Метричні простори	12
Лекція 1. Множини. Відношення. Відображення	12
А. Множини та індексовані набори	12
Б. Дії над множинами	13
В. Відношення та їх властивості	14
Г. Функції	15
Д. Обмеження	16
Е. Композиції. Тотожні відображення	17
Ж. Діаграми та їх комутативність	17
Лекція 2. Властивості відображень. Потужності множин	23
А. Прообрази елементів та множин	23
Б. Ін'єктивні відображення	24
В. Сюр'єктивні відображення. Відношення еквівалентності, фактор-множини та фактор-відображення	24
Г. Ін'єкції і сюр'єкції у композиціях	25
Д. Бієктивні відображення. Обернені функції	26
Е. Ліві і праві обернені відображення	27
Ж. Потужності множин	28
Лекція 3. Метричні простори	34
А. Метрика і метричний простір	34
Б. Класичні метрики	34
В. Ультраметрики та псевдометрики	35
Г. Підпростори і прямі добутки просторів	36
Д. Кулі і замкнені кулі	38
Е. Послідовності та їх границі	38
Ж. Точки дотику множини. Замкнені множини	40
И. Внутрішні точки множини. Відкриті множини	40
К. Властивості замкнених та відкритих множин	41
Л. Замикання, внутрішність і межа	42
Лекція 4. Властивості метричних просторів	48
А. Скрізь щільні та ніде не щільні множини	48
Б. Густина метричного простору	49

В.	Фундаментальні послідовності. Повні та неповні простори	50
Г.	Повні підпростори	51
Д.	Відображення, що зберігають відстані. Ізометрії	52
Е.	Поповнення метричного простору	53
Ж.	Мінімальність поповнення	54
И.	Єдиність поповнення	56
Лекція 5.	Неперервні відображення метричних просторів	60
А.	Означення неперервності та їх рівносильність	60
Б.	Рівномірна неперервність	62
В.	Збереження неперервності обмеженнями та композиціями	63
Г.	Неперервність функції кількох змінних	64
Д.	Добутки відображень та їх неперервність	65
Е.	Неперервність та відкриті множини	66
Ж.	Топологічна еквівалентність метрик	67
И.	Еквівалентність метрик за Коші та рівномірна еквівалентність	69
К.	Гомеоморфізми метричних просторів	70
Розділ II.	Топологічні простори	79
Лекція 1.	Топології та способи їх задання	79
А.	Топологія і топологічний простір. Метризовні і неметризовні топології	79
Б.	Замкнені множини	81
В.	Внутрішність, замикання, межа і похідна множина. Внутрішня точка, точка дотику, гранична точка	82
Г.	Оператор замикання і задання топології з його допомогою. Оператор внутрішності	84
Лекція 2.	Бази і передбази. Кардинальні функції	89
А.	Задання топології базою	89
Б.	Чи є сім'я множин базою?	89
В.	Передбаза	91
Г.	Бази та передбази замкнених множин	92
Д.	Локальна база у точці	93
Е.	Повна система околів	94
Ж.	Скрізь щільні та ніде не щільні множини	95

И.	Густина та вага топологічного простору. Характер простору в точці	95
К.	Сепарабельність. Перша та друга аксіоми зліченності	97
Л.	Ліндельофові простори	98
Лекція 3.	Неперервні відображення топологічних просторів	104
А.	Неперервність у точці	104
Б.	“Глобальна” неперервність	105
В.	Секвенціальна неперервність	107
Г.	Неперервність композиції неперервних відображень. Гомеоморфізм	109
Лекція 4.	Топології, визначені відображеннями. Підпростори та фактор-простори	113
А.	Перенесення топології вздовж відображення	113
Б.	Підпростори	115
В.	Неперервність відображення та його обмежень	117
Г.	Топологічні вкладення	118
Д.	Фактор-простори	119
Лекція 5.	Топології, визначені сім'ями відображень. Топологічні суми та добутки	125
А.	Фінальна топологія. Топологічна сума	125
Б.	Букети та приклеювання	126
В.	Ініціальна топологія. Топологічний добуток	127
Г.	Добуток довільної кількості просторів	130
Д.	Бази та передбази топології добутку	132
Е.	Декартові та діагональні добутки відображень	133
Лекція 6.	Аксіоми відокремлення	140
А.	Аксіоми T_0 та T_1	140
Б.	Аксіома T_2 . Гаусдорфові простори	141
В.	Аксіома T_3 . Регулярні простори	142
Г.	Аксіома T_4 . Нормальні простори	143
Д.	Спадкові властивості	145
Лекція 7.	Зв'язність та її різновиди	150
А.	Відокремлені множини	150
Б.	Зв'язні множини і простори	150
В.	Критерії зв'язності	151
Г.	Зв'язність дійсної прямої та проміжків на ній	152
Д.	Дії, що зберігають зв'язність. Компоненти зв'язності	153

Е.	Криві. Лінійно зв'язні множини	155
Ж.	Локальна зв'язність та локальна лінійна зв'язність	157
Лекція 8.	Продовження функцій і функціональна відокремленість	162
А.	Функціональна відокремленість. Тихоновські простори	162
Б.	Велика лема Урисона	163
В.	Продовження неперервної функції, заданої на замкненому підпросторі	164
Г.	Функціонально відкриті та функціонально замкнені множини. Досконалі простори	166
Розділ III.	Компактність і метризованість	171
Лекція 1.	Компактні множини та простори	171
А.	Компактність	171
Б.	Зліченна компактність	172
В.	Ознаки компактності та зліченної компактності	173
Г.	Властивості компактних множин та просторів	175
Лекція 2.	Компактність топологічного добутку. Вкладення в куби. Компактифікації	181
А.	Компактність топологічних добутків	181
Б.	Вкладення у тихоновські куби	184
В.	Вкладення у гільбертів куб	185
Г.	Компактифікації	187
Лекція 3.	Стоун-чехівська компактифікація. Александровська компактифікація. Локальна компактність	190
А.	Порівняння компактифікацій. Компактифікація Стоуна-Чеха	190
Б.	Локально компактні простори. Компактифікація Александрова	193
Лекція 4.	Паракомпактність і метризованість	200
А.	Властивості сімей множин у топологічному просторі	200
Б.	Паракомпактні простори	201
В.	Теорема Стоуна	201
Г.	Теорема Нагати-Смирнова про метризованість	203
Д.	Стиснення покриття і розбиття одиниці	204
Розділ IV.	Многовиди	210
Лекція 1.	Локально евклідові простори. Топологічні многовиди	210

А.	Карти. Локально евклідові простори	210
Б.	Топологічні многовиди. Внутрішність та край	212
В.	Атлас многовида	214
Г.	Задання топології на многовиді з допомогою атласу	215
Д.	Еквівалентні атласи	216
Е.	Компоненти зв'язності многовида. Відкриті і замкнені многовиди	217
Лекція 2.	Диференційовні многовиди. Функції на многовидах. Дифеоморфізми	220
А.	Класи гладкості функцій	220
Б.	Координатне зображення функції, визначеної на підмножині многовида. Перевірка неперервності та класу гладкості такої функції	222
В.	C^r -узгодженість карт та C^r -атлас	223
Г.	C^r -еквівалентність атласів. Структура диференційовного многовида	224
Д.	Коректне означення класів гладкості для функцій у многовиди та між многовидами	224
Е.	Приклад побудови атласів диференційовних многовидів та перевірки гладкості відображення між ними	226
Ж.	Дифеоморфізми	227
И.	Утворення нових диференційовних многовидів з існуючих	227
Лекція 3.	Відображення між диференційовними многовидами та їх локальна будова	231
А.	Матриця Якобі і сильна похідна	231
Б.	Теорема про неявну функцію та про обернену функцію	232
В.	Відображення півпростору у себе, яке локально зберігає край, і обернене до нього	233
Г.	Ранг матриці Якобі локального зображення. Випадок лінійно незалежних рядків	235
Д.	Регулярні точки диференційовного відображення. Регулярні відображення. Імерсії і субімерсії	237
Е.	C^r -вкладення та C^r -підмноговиди	238
Ж.	Правильні відображення	238

И.	Будова правильного у точці відображення між многовидами рівної вимірності. Локальний дифеоморфізм	240
К.	Правильні у точці відображення між многовидами різної вимірності	241
Л.	Задання диференційовних многовидів у скінченновимірному евклідовому просторі рівняннями та нерівностями	244
Лекція 4.	Дотичний простір до диференційовного многовида. Дотичне розшарування	248
А.	Диференціювання та його координати	248
Б.	Дотичний простір як множина диференціювань. Перетворення при зміні локальної системи координат	249
В.	Дотичні вектори як швидкості кривих у точці	250
Г.	Побудова диференціювання у точці на основі кривої, що проходить через точку	251
Д.	Дотичний многовид	252
Е.	Дотичне розшарування	253
Ж.	Векторні поля та їх інтегральні криві	253
И.	Відображення дотичних просторів, індуковане диференційовним відображенням між многовидами	254
К.	Порівняння орієнтації баз лінійного простору	255
Л.	Порівняння орієнтації баз дотичних просторів у різних точках диференційовного многовида	256
М.	Орієнтовні і неорієнтовні многовиди	259
Розділ V.	Елементи алгебраїчної топології	263
Лекція 1.	Гомотопії і ретракції	263
А.	Гомотопія між відображеннями	263
Б.	Гомотопійні класи та гомотопійна еквівалентність	265
В.	Обмеження та об'єднання гомотопій	266
Г.	Зв'язані гомотопії	266
Д.	Коли гомотопність є гарантованою?	267
Е.	Стягвані простори	268
Ж.	Ретракції і ретракти та їх види	269
Лекція 2.	Фундаментальна група	273
А.	Параметризовані криві та заміни параметра	273
Б.	Еквівалентність кривих. Петлі	273

В.	Добуток кривих	275
Г.	Зміна кривих на еквівалентні та вибір замін параметра не впливають на клас добутку	276
Д.	Асоціативність множення кривих з точністю до еквівалентності	277
Е.	Множення класів петель. Фундаментальна група	278
Ж.	Як залежить фундаментальна група від вибору базової точки?	279
И.	Гомоморфізм фундаментальних груп, індукований неперервним відображенням	280
К.	Фундаментальні групи ретрактів та стягуваних просторів	282
Лекція 3.	Накриваючі простори та підняття відображень	286
А.	Накриття топологічного простору	286
Б.	Існування і єдиність накриваючого шляху	288
В.	Підняття відображення з одиничного квадрата. Еквівалентні криві мають еквівалентні підняття	289
Г.	Підняття відображень з лінійно зв'язних просторів	291
Д.	Універсальне накриття та застосування його автоморфізмів для обчислення фундаментальної групи	294
Е.	Фундаментальна група кола	297
Лекція 4.	Обчислення та застосування фундаментальних груп	300
А.	Фундаментальна група добутку просторів	300
Б.	Вільний добуток груп. Пряма сума абелевих груп	301
В.	Фундаментальна група букета просторів	303
Г.	Гомотопійно еквівалентні простори мають ізоморфні фундаментальні групи	308
Д.	Приклади застосувань фундаментальних груп	308
	Предметний покажчик	315
	Література	324